Todennäköisyyslaskenta, lopputentti/MV

28.2.2003

1. Heitetään kahta noppaa. Laske todennäköisyys, että

   a) Ainakin toinen pisteluvuista on vähintään 4.

   b) Suuremman ja pienemmän pisteluvun erotus on tasan 3.

2. Laatikko sisältää värillisiä palloja seuraavan taulukon mukaisesti

Laatikko	Punainen	Valkoinen	Sininen
1	3	4	1
2	1	2	3
3	4	3	2

   Valitaan satunnaisesti yksi laatikko. Valitusta laatikosta nostetaan satunnaisesti yksi pallo. Havaitaan, että nostettu pallo on punainen. Millä todennäköisyydellä nostettu pallo on peräisin laatikosta numero 2?

3. a) Rokote tuottaa immuniteetin 99.99%:n varmuudella. Millä todennäköisyydellä 10000:n rokotetun joukossa korkeintaan kahdella ei ole immuniteettia?

   b) Heitetään noppaa, kunnes tulee silmäluluku 6. Laske todennäköisyys, että tarvittavien heittokertojen lukumäärä ≥ 3.

4. Olkoon $D^2(\mathbf{x})$ satunnaismuuttujan $\mathbf{x}$ varianssi. Olkoon $\mathbf{z} = a\mathbf{x} + b$, missä a ja b ovat vakioita.

   a) Määrää $\mathbf{z}$:n varianssi.

   b) Olkoon $\mathbf{x} \sim \mathrm{Tas}(1, 2)$. Määrää $D^2(\mathbf{x})$.

5. Olkoon satunnaismuuttujien $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ yhteistiheys muotoa

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

   Määrää ehdolliset tiheydet $f(\mathbf{x} \mid \mathbf{y} = y)$ ja $f(\mathbf{y} \mid \mathbf{x} = x)$ sekä ehdolliset odotusarvot $E(\mathbf{x} \mid \mathbf{y} = y)$ ja $E(\mathbf{y} \mid \mathbf{x} = x)$. Piirrä reunatiheyksien kuvaajat. Ovatko satunnaismuuttujat riippumattomia?

Joitakin jakaumia

$\mathbf{x} \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$

$$P\{\mathbf{x} = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad E(\mathbf{x}) = \lambda$$

$\mathbf{x} \sim \text{Geom}(p)$ $(0 < p < 1, q = 1 - p)$

$$P\{\mathbf{x} = k\} = pq^k, \quad E(\mathbf{x}) = \frac{p}{q}$$

$\mathbf{x} \sim \text{Bin}(n, p)$ $(n \in \mathbf{N}_+, 0 \leq p \leq 1, \ q = 1 - p)$

$$P\{\mathbf{x} = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \quad E(\mathbf{x}) = np$$

$\mathbf{x} \sim \text{Tas}(a, b)$ $(a < b)$

$$f(x) = \frac{1}{b - a}, \quad (a < x < b), \quad F(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

$\mathbf{x} \sim \text{Exp}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (x > 0)$$