

Vastaa oheisista tehtävistä neljään (4).

1. (a) Osoita, että joukko  $\{1, \sin t, t \cos t\}$  on lineaarisesti riippumaton funktioavaruudessa  $\mathcal{F}$ .

(b) Perustelee, että kahden lineaarikuvauksen yhdistetty kuvaus on lineaarikuvaus.

2. Tarkastellaan matriisia  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & \alpha \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$  tapauksissa  $\alpha = 0$  ja  $\alpha \neq 0$ .

Määrittää A:n ominaisarvot ja ko. ominaisavaruuksille kannat molemmissa tapauksissa. Onko A diagonalisoituva näissä tapauksissa?

3. (a) Pitääkö (reaalisessa sisätuloavaruudessa) paikkansa väite:  $\|u - v\| = \sqrt{2}$ , jos  $u$  ja  $v$  ovat ortonormeeratut? (2p)

(b) Olkoon  $f(t) = t^4$  ja  $H$  välillä  $[-2, 2]$  jatkuvien funktioiden joukon aliavaruus, jonka ortonormaali kanta on  $\{1/2, \sqrt{3}t/4, \sqrt{5}(3t^2 - 4)/16\}$  (sisätulo määriteltynä ko. integraalilla). Etsi sellainen funktio  $g \in H$  jolle  $\|f - g\|$  on pienin kaikkien  $H$ :n funktioiden suhteen. Perustelut! (4p)

4. Matriisin  $A$  singulaariarvot ovat  $s_1 = 2\sqrt{2}$ ,  $s_2 = \sqrt{2}$ ,  $s_3 = 0$ . Vastaavat (vasemman- ja oikeanpuoliset) singulaarivektorit ovat  $u_1 = \alpha[1, 0, 1]^T$ ,  $u_2 = [0, 1, 0]^T$ ,  $u_3 = \alpha[1, 0, -1]^T$ ,  $v_1 = u_3$ ,  $v_2 = u_2$ ,  $v_3 = u_1$ ,  $\alpha = 1/\sqrt{2}$ .

(a) Määrittää pns-ratkaisu  $\hat{x}$  yhtälöryhmälle  $Ax=b$  s.e.  $\|\hat{x}\|$  on minimissään, kun  $b = [2, 1, 2]^T$ .

(b) Onko  $\hat{x}$  myös tarkka ratkaisu? Onko yhtälöryhmällä muita pns-ratkaisuja?

5. Perustelee seuraavat tulokset reaalille neliömatriisille  $A$ : (a) Jos  $A^2 = 0$ , silloin 0 on ainoa  $A$ :n ominaisarvo. (b)  $A$ :n erisuuriin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat ortogonaalit, jos  $A^T = A$ . (c)  $A$ :n määräämä neliömuoto ( $A$  symmetrinen) on positiivisesti definiitti, jos kaikki  $A$ :n ominaisarvot ovat aidosti positiivisia.

**Huom.** (1) Mukana saa olla taulukkokirja, laskin ja tiivistelmäpaperi (2-puolinen A4-arkki), jossa on määritelmiä, lauseita ym. tuloksia (ei todistuksia eikä tehtävien ratkaisuja). (2) Tehtävien ratkaisut tulevat ilmoitustaululle (Microtekniiaan).